Universität Wuppertal
Fakultät IV, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Dr. Sean Tilson

Sommersemester 2019
17.6.2019

Probeklausur Lineare Algebra II - Musterlösung

Aufgabe 1

Man erhält eine Bijektion $\phi : (K^n)^{\times n} \xrightarrow{\cong} \mathrm{Mat}_K(n \times n)$, indem man ein n-Tupel von Vektoren $(\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n) \in (K^n)^{\times n}$ als Spaltenvektoren einer Matrix auffasst.
Dann sind für $F : \mathrm{Mat}_K(n \times n) \to K$ folgende zwei Bedingungen hinreichend, so dass $F = \det$ gilt:

(i) $F \circ \phi$ ist eine alternierende Multilinearform.

(ii) $F(E_n) = 1$.

Begründung: Nach Satz 14.12 ist $dim(\mathrm{Alt}_n(K^n)) = 1$ und somit ist jede alternierende Multilinearform dieses Typs bereits durch ihren Wert an E_n eindeutig bestimmt, d.h. Bedingungen (i) und (ii) bestimmen eine eindeutige Abbildung. Nach Lemma 14.6 erfüllt det diese beiden Bedingungen.

Aufgabe 2

(i) Sei $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $\chi_{A_1} = (t-1)^2$, also ist 1 der einzige Eigenwert.
Aber $dim(ker(A_1 - E_2)) = 1$, und somit spannen die Eigenräume (in diesem Fall nur V_1) nicht den ganzen Raum auf. Nun folgt aus Satz 19.14, dass A_1 nicht diagonalisierbar sein kann.

(ii) Sei $A_2 = E_2$, dann ist $\chi_{A_2} = (t-1)^2$.
Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt (Satz 20.16), und beide dieselben Nullstellen haben (Satz 20.18), folgt dass $p_{A_2} \in \{t-1, (t-1)^2\}$.
Da $ev_{A_2}(t-1) = A_2 - E_2 = 0$ folgt $p_{A_2} = t - 1 \neq \chi_{A_2}$.

(iii) Sei $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dann ist $\chi_{A_3} = (t-1)^2$. Analog zu (ii) folgt, dass $p_{A_3} \in \{t-1, (t-1)^2\}$.
Da $ev_{A_3}(t-1) = A_3 - E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ folgt nun $p_{A_3} = (t-1)^2 = \chi_{A_3}$.

Aufgabe 3

Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3 \times 3)$ gilt:

$$\chi_A = t^3 - \mathrm{tr}(A)t^2 + \sum_{i=1}^{3} \det(A_{ii})t - \det(A)$$

.
Im vorliegenden Fall bedeutet dies:

$$\chi_A = t^3 + t^2 - t - 1 = t^2(t+1) - (t+1) = (t^2-1)(t+1) = (t-1)(t+1)^2$$

.
Analog zu Aufgabe 2 (ii) folgt: $p_A \in \{(t-1)(t+1), (t-1)(t+1)^2\}$.
Da $ev_A((t-1)(t+1)) = ev_A(t^2-1) = A^2 - E_3 = 0$, folgt $p_A = t^2 - 1$.
(Man überprüfe, dass tatsächlich $A^2 = E_3$ gilt)

Aufgabe 4
Für $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$ gilt:
$$\chi_A = t^2 - \mathrm{tr}(A)t + \det(A).$$

Im vorliegenden Fall bedeutet dies: $\chi_A = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$. Insbesondere ist 1 der einzige Eigenwert von A.
Analog zu Aufgabe 2 (ii) folgt: $p_A \in \{t-1, (t-1)^2\}$.
Da $ev_A(t-1) = A - E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$, folgt $p_A = t^2 - 2t + 1$.
Ferner ist $V_1 = ker(A - E_2) = ker \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.
Aus dem Satz über die Hauptraumzerlegung (Satz 22.3) folgt $Hau(A, 1) = \mathbb{R}^2$, da 1 der einzige Eigenwert ist.
Nun ergänzen wir den Eigenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2 = Hau(A, 1)$ fassen diese als Spaltenvektoren einer Matrix $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf und zeigen nun, dass diese die geforderten Bedingungen erfüllt:
Aus Satz, 9.22, Satz 14.20, oder kurzer Rechnung folgt: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und wir berechnen: $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D + N$ mit der Diagonalmatrix $D = E_2$ und der nilpotenten Matrix $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Schließlich kommutieren D und N, da E_2 mit jeder Matrix kommutiert.

Aufgabe 5

1. Falsch:
   Gegenbeispiel: Für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $n > 0$ gilt: $A^n = A \neq 0$

2. Richtig:
   Erfüllt A die genannten Bedingungen, so ist A trigonalisierbar, mit Nulleinträgen auf der Diagonale. Nach Präsenzaufgabe 24 ist Nilpotenz unabhängig von der Wahl der Basis, und nach Übungsaufgabe 30 sind alle oberen Dreiecksmatrizen mit Nulleinträgen auf der Diagonale nilpotent.

3. Falsch:
   Gegenbeispiel: $A = B = E_n, \alpha = -\beta = 1$.

4. Richtig:
   Da $\det(A)\det(B) = \det(AB) \neq 0$, folgt $\det(A), \det(B) \neq 0$, also sind A und B invertierbar.

5. Richtig:
   Das folgt z.B. aus Korollar 15.5

Aufgabe 6
Da A nilpotent ist, existiert $m > 0$ mit $A^m = 0$. Nun berechnen wir:

$$(E_n - A)(\sum_{i=0}^{m-1} A^i) = \sum_{i=0}^{m-1} (A^i - A^{i+1}) = E_n + \sum_{i=1}^{m-1} (-A^i + A^i) - A^m = E_n$$

Also ist $E_n - A$ invertierbar mit Inversem: $(\sum_{i=0}^{m-1} A^i)$.

Aufgabe 7 Siehe Satz 16.5 und Satz 16.12.