Universität Wuppertal
Fakultät IV, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Falk Beckert

Sommersemester 2019
4.7.2019

Übungen zur Linearen Algebra II
Zusatz-Blatt 12

Abgabefrist: Donnerstag, den **11.7.2019** bis **10:10** Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 42

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $dim(V) = 2n$ und $\phi, \psi : V \times V \to \mathbb{R}$ nicht ausgeartete Bilinearformen, wobei ϕ symmetrisch und ψ alternierend ist, sowie $f : V \to V$ linear mit $f^2 = -id$, so dass

(a) $\phi(x, y) = \phi(f(x), f(y))$, (b) $\psi(x, y) = \psi(f(x), f(y))$ und (c) $\tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\phi} = -\tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\psi}$ gelten.

Zeigen Sie, dass je zwei dieser Strukturen die Dritte bestimmen, d.h.:

1. Sind ϕ und f gegeben, so dass (a) gilt, ist $\psi(-, -) = \phi(-, f(-))$ eine alternierende Bilinearform, (b) und (c) sind erfüllt.

2. Sind ψ und f gegeben, so dass (b) gilt, ist $\phi(-, -) = \psi(f(-), -)$ eine symmetrische Bilinearform, (a) und (c) sind erfüllt.

3. Sind ϕ und ψ gegeben, so dass (c) gilt, so ist $f = \tilde{\psi}^{-1} \circ \tilde{\phi}$ ein Endomorphismus, der $f^2 = -id$, (a) und (b) erfüllt.

Zusatz: Zeigen Sie, dass V durch $\mu : \mathbb{C} \times V \to V, \mu(a+bi, v) := av+bf(v)$ eine $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur erhält, bezüglich derer die Abbildung $\phi + i\psi : V \times V \to \mathbb{C}$ eine hermitesche Form ist.

Aufgabe 43

Beweisen Sie Lemma 23.22 aus der Vorlesung: Es sei

$$f = f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$$

gegeben durch

$$(z_1, ..., z_n) \mapsto (a_1, b_1, ..., a_n, b_n),$$

wobei $z_j = a_j + ib_j \ \forall \ j = 1, ..., n$. Dann gilt:

1. f ist $\mathbb{R}$-linear, wobei $\mathbb{C}^n$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist vermöge $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ und $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2. f ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

3. $\forall \ v \in \mathbb{C}^n$ gilt:$\|v\| = \|f(v)\|$.

   Hierbei steht auf der linken Seite die Norm aus Definition 23.20 ($K = \mathbb{C}$) und auf der rechten Seite die euklidische Norm aus der Analysis ($K = \mathbb{R}$).