Universität Wuppertal
Fakultät IV, Mathematik und Informatik
Prof. Dr. Jens Hornbostel
Sean Tilson, PhD

Sommersemester 2019
15.4.2019

Übungen zur Linearen Algebra II
Blatt 2

Abgabefrist: Dienstag, den **23.4.2019** bis **10:10** Uhr in die Briefkästen

---

Aufgabe 5
Sei K ein Körper und $x_1, x_2 \dots x_n \in K$. Zeigen Sie mit Induktion nach n, dass dann

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

gilt. Die Determinante dieser Matrix heißt die *Vandermonde-Determinante*.

Aufgabe 6
Sei $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ mit $A^t = -A$ und ungeradem n. Zeigen Sie, dass dann $\det(A) = 0$ oder $1 + 1 = 0$ in K gilt.

Aufgabe 7
Sei K ein Körper.

1. Ist die Abbildung $\mathrm{Mat}_K(n \times n) \to \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ definiert durch $A \mapsto A^{ad}$ linear?
2. Sei A ein $GL_n(K)$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass dann $\det(A^{ad}) = (\det(A))^{n-1}$ gilt.

Aufgabe 8
Betrachten Sie den Isomorphismus $A/\ker f \xrightarrow{\bar{f}} \mathrm{Im}(f)$ aus dem Isomorphiesatz für das Beispiel $A = \mathbb{R}^2$,

$$f : A \longrightarrow A$$
$$f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a + b \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen sie den Kern und das Bild von f und bestimmen Sie die Abbildung $\bar{f}$ auf einer expliziten Basis.